Concours d'admission de 1997

Mathématiques III

Option économique

Vendredi 23 mai 1997 de 8^h à 12^h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats.

Sont autorisées :
- ⇨ *Une règle graduée.*
- ⇨ *Une calculatrice de poche pouvant être programmable et /ou alphanumérique, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de surface de base maximum de 21 cm de long sur 15 cm de large.*

EXERCICE 1 (5 points)

1) On définit la fonction f sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, par : $f(t) = \frac{2t}{1+t} - \ln(1+t)$, où ln désigne la fonction « logarithme népérien ».

a) Étudier les variations de f. Préciser la nature de la branche infinie de la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé, ainsi que l'équation de la tangente à l'origine.

b) Montrer que l'équation $f(t) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$, que l'on notera α. En déduire le signe de $f(x)$ selon la position de x par rapport à α. Montrer que α est comprise entre 3 et 4. Donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.

2) On considère la fonction g définie par : $g(x) = e^{-x}.\ln(1 + e^{2x})$ (où $x \mapsto e^x = \exp(x)$ désigne la fonction exponentielle de base e).

a) Montrer que g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer $e^x.g'(x)$. Déterminer le signe de $g'(x)$, selon les valeurs de x.

c) Étudier les branches infinies de la représentation graphique de g.

EXERCICE 2 (5 points)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ étant rapporté à sa base canonique, on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ associé à A.

I désigne la matrice unité d'ordre 4.

1) Montrer que les seules valeurs propres de f sont 0 et 1. Déterminer les vecteurs propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2) a) Déterminer le noyau de $f \circ f$.
b) A-t-on $\mathrm{Ker}(f \circ f) = \mathrm{Ker}\, f$?
c) A-t-on $\mathrm{Im}(f \circ f) = \mathrm{Im}\, f$?

3) On considère les vecteurs $\varepsilon_1 = (1,1,0,0), \varepsilon_2 = (-1,0,1,0), \varepsilon_3 = (0,0,1,1)$ et $\varepsilon_4 = (1,0,1,1)$. Montrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Quelle est la matrice de f relativement à cette nouvelle base ?

EXERCICE 3 (5 points)

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n, définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_n(x) = x + 2.x^2 + \cdots + n.x^n = \sum_{k=1}^{n} k.x^k$$

Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution, que l'on notera u_n.

2) En évaluant $f_{n+1}(u_n)$, montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

3) a) Montrer que $f_n(x) = x \times \dfrac{1-(n+1).x^n + n.x^{n+1}}{(1-x)^2}$.
b) Calculer u_2. En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n)^n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} n.(u_n)^n$.
c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

EXERCICE 4 (5 points)

Une urne contient une proportion p de boules blanches et la proportion $q = 1-p$ de boules noires, avec $0 < p < 1$. On effectue des tirages successifs d'une boule de cette urne, avec remise de la boule obtenue à un tirage quelconque avant le tirage suivant, jusqu'à obtenir **deux fois de suite** la même couleur et on cesse alors les tirages. On note X le nombre aléatoire de tirages ainsi effectués.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois une boule blanche aux deux premiers tirages ? d'obtenir deux fois une boule noire aux deux premiers tirages ? En déduire la probabilité de l'événement $(X = 2)$.

2) Calculer la probabilité de l'événement $(X = 3)$.

3) Plus généralement, déterminer, pour tout $k \geq 2$, la probabilité de l'événement $(X = k)$ (on distinguera deux cas, selon la parité de k).

4) Montrer que l'on a : $\sum\limits_{k=2}^{\infty} P(X = k) = 1$. Que peut-on en conclure ?

5) Montrer que X admet une espérance. Calculer l'espérance de X.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail